Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Фрактальная модель формирования облачных систем с использованием дробных дифференциальных и интегральных операторов

Авторы:
И. Е. Кузнецов, e-mail: vaiumet@mail.ru
С. Л. Кирносов, e-mail: slk_met@mail.ru
Д. Б. Долгих, e-mail: deendolgij@yandex.ru

Аннотация. *В работе построена модель формирования облачных систем конвективного происхождения, основанная на использовании техники дробного интегро-дифференцирования, с применением фрактальных свойств и свойств эредитарности атмосферных процессов.*

Ключевые слова: *авиационная метеорология, конвективная облачность, детерминированный хаос, фракталы, устойчивость систем, дробное интегро-дифференцирование, эредитарность.*

В настоящее время **опасные явления погоды конвективного происхождения** продолжают оказывать негативное влияние на эффективность и безопасность полетов авиации. Существующие прогностические способы таких явлений, как кучево-дождевая и мощная кучевая облачность, не всегда в полной мере дают требуемую информацию авиационному потребителю. Это связано с наличием неустранимой в пространстве и во времени **метеорологической неопределенности**, а также с несовершенством тех или иных **прогностических методик** применительно к конкретным физико-географическим районам.

Значительное количество существующих реальных метеорологических процессов не укладывается в стандартные представления механики сплошной среды и требует привлечения новых сведений о фрактальной природе среды, в которой эти процессы происходят. К схожим процессам относятся, например, диффузия примесей в грунте, распространение тепла в аэрозолях и т.д. Для их модельного описания привлекается модифицированный соответствующим образом закон Фика (Фурье), что требует, в свою очередь, использования математического аппарата **дробного интегро-дифференциального исчисления**.

Целью работы является повышение качества прогностической метеорологической информации об опасных явлениях погоды конвективного происхождения на основе построения фрактальной модели формирования облачных систем с использованием дробных дифференциальных и интегральных операторов.

Техника дробного интегро-дифференцирования

Существует несколько неэквивалентных подходов к определению дробных интегральных и дифференциальных операторов; наибольшее распространение среди них, однако, получили односторонние операторы Римана-Лиувилля. Дробные интегралы Римана-Лиувилля порядка α определяются выражениями

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha-1} d\xi, \; x > a,$$

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(\xi)(\xi - x)^{\alpha-1} d\xi, \; x > b.$$

Здесь и далее $\Gamma(\alpha)$ – стандартное обозначение для интеграла Эйлера второго рода (гамма-функция). Первый из них называется левосторонним, второй – соответственно, правосторонним. Эти конструкции определены для функций из пространства абсолютно интегрируемых на отрезке $[a, b]$, существуя почти всюду. Дробные производные Римана-Лиувилля определяются соотношениями

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{n-\alpha-1} d\xi,$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b f(\xi)(\xi - x)^{n-\alpha-1} d\xi,$$

где $n = [\alpha] + 1$. Представленные конструкции являются аналитическими продолжениями дробных интегралов в область $\alpha < 0$.

Определения дробного интегрирования и дифференцирования легко распространяются со случая конечного отрезка на случай бесконечного промежутка; при этом рассматриваемые функции должны удовлетворять некоторым дополнительным требованиям, связанным с поведением на бесконечности, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились. Дробные интегралы Римана-Лиувилля на всей числовой оси вводятся соотношением типа свертки:

$$(I_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} f(x \mp \xi)\xi^{\alpha-1} d\xi \ .$$

Производные дробного порядка вводятся аналогичным образом:

$$(D_{\pm}^{\alpha} f)(x) = \frac{d}{dx^{n}} (I_{\pm}^{n-\alpha} f)(x) \ .$$

Физический смысл дробного дифференцирования и уравнений, содержащих производные нецелого порядка, зависит от конкретной физической системы и задачи на рассмотрение процессов в ней. Однако общим свойством всех систем, описываемых посредством дифференциальных уравнений дробного порядка, является наличие свойства эредитарности (наличие памяти).

Построение фрактальной модели генезиса облачных систем

В модели генезиса конвективных облачных систем, учитывающая фрактальные свойства атмосферы на основе **аппарата дробного интегро-дифференцирования горизонтальная компонента вектора градиента давления является одним из базовых параметров**, определяющих фрактальные свойства облачных образований, в том числе – и над поверхностью океана. Неравномерное нагревание земной поверхности, а также вихревые процессы в приповерхностном слое приводят к пространственно изменяющемуся значению горизонтальной компоненты градиента давления, которая, в свою очередь, оказывает влияние на динамику потоков в приповерхностном слое.

В простейшем случае прозрачного смешанного слоя, горизонтальные составляющие атмосферных движений u_M, v_M, эквивалентная потенциальная температура $(\theta_e)_M$ и общее соотношение смешивания для воды $(q_w)_M$ принимаются постоянным величинами по вертикальной координате. Таким образом, уравнения динамики для u_M, v_M, $(\theta_e)_M$, $(q_w)_M$, а также для глубины смешанного слоя z_I, с учетом фрактальных свойств могут быть записаны в виде:

$$D_t^{\alpha} u + u \frac{\partial u}{\partial x} = fv + \frac{1}{z_1} \int_0^{z_1} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) dz + \frac{(F_u)_0 - (F_u)_{I-}}{\overline{\rho} z_I} + K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$D_t^{\alpha} v + u \frac{\partial v}{\partial x} = -fu + \frac{1}{z_1} \int_0^{z_1} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy}\right) dz + \frac{(F_v)_0 - (F_v)_{I-}}{\overline{\rho} z_I} + K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$D_t^{\alpha} \theta_e + u \frac{\partial \theta_e}{\partial x} = \frac{\left(F_{\theta_e}\right)_0 - \left(F_{\theta_e}\right)_{I-}}{\overline{\rho} z_I} + H_R + K \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial x^2},$$

$$D_t^{\alpha} q_w + u \frac{\partial q_w}{\partial x} = \frac{\left(F_{q_w}\right)_0 - \left(F_{q_w}\right)_{I-}}{\overline{\rho} z_I} + K \frac{\partial^2 q_w}{\partial x^2},$$

$$D_t^{\alpha} z_I + u \frac{\partial z_I}{\partial x} = (w)_{I-} + (w_e)_I + K \frac{\partial^2 z_I}{\partial x^2},$$

$$D_t^{\alpha} z_I + u \frac{\partial z_I}{\partial x} = (w)_{I-} + (w_e)_I + K \frac{\partial^2 z_I}{\partial x^2}.$$

Начальные значения потенциальной температуры θ_M во всех точках равны θ_0 – температуре поверхности земли. Начальные и граничные атмосферные условия – параметры фрактальной модели: $\partial\theta/\partial z$ = 7 К/км; $\partial q/\partial z$ = -0,075 г/(кг.км); $\partial\theta/\partial x$ = 0; $\partial q/\partial x$ = 0; u_g = 10 м/с; $p_R = 616{,}15$ м; $(\partial p/\partial x)_R = 0$; $\theta_R = 273\ (283)$ К; $\theta_{I+} = 278$ К; $\theta_M = 271$ К; $z_I = 500$ м; $q_{I+} = 0{,}6625$ г/кг; $q_M = 2$ г/кг; $\tau_{abj} = 6$ часов; $C_{drag} = 1$; $r/\Delta z = 0{,}4$; $C_w = 0{,}3$; $\Delta x = 2$; $\Delta t = 20$ с; $K = 2{,}5\cdot 10^5$ м2/с.

Численное интегрирование осуществляется с шагом по времени 20 с. Решение с использованием фрактальной модели демонстрирует асимптотическую устойчивость по времени и сходимость к квазистационарному решению, а представляемые численные результаты для характеристик получены для времени моделирования $T = 55{,}56$ часов (10000 шагов по времени). Численные результаты, демонстрирующие динамику наблюдаемых параметров θ и q_w представлены на рис. 1.

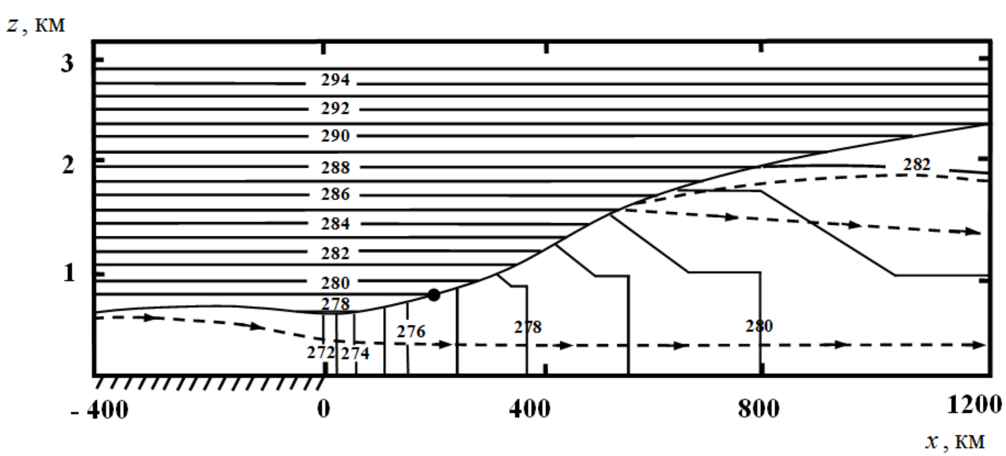

Рис. 1. Вертикальные сечения температурных профилей в нижней части свободной атмосферы, а также моделируемого приповерхностного слоя

Заключение

Таким образом, учет фрактальной структуры кучевых облаков на модельном уровне (с использованием техники дробного интегро-дифференцирования) позволяет достаточно точно и адекватно описывать генезис облачных структур, и, как следствие – заблаговременно предсказывать опасные явления погоды на мезомасштабном уровне, диагностировать и идентифицировать основные динамические параметры таких структур, а также анализировать их влияние на условия полетов.

Список литературы

1. Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
2. Учайкин, В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. – 512 с.
3. Ляхов, Л.Н. Дробные производные и интегралы и их приложения. Учебно-методическое пособие для вузов / Л.Н. Ляхов, Э.Л. Шишкина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – 100 с.
4. Mikhailov, V.V. The Meteorological service model of air and space forces using the fractal theory / V.V. Mikhailov, S.L. Kirnosov // Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies, 2016, 9(3). – Pp. 366-375. DOI: 10.17516/1999-494X-2016-9-3-366-375.
5. Михайлов, В.В. Учет фрактальных свойств при функционировании авиационной системы поддержки принятия метеозависимых решений / В.В. Михайлов, М.Е. Семенов, С.Л. Кирносов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2015. – № 1. – С. 12-18.